Exercice 1

1. Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = \frac{3}{8},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer $P(\overline{A}|\overline{B})$.
2. Supposons que les événements A et B sont indépendants tels que : $P(A) = \frac{1}{2},\ P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Calculer $P(\overline{B}|A)$.

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité et A un événement de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P = P_A$.

Exercice 3

$1/4$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $1/12$ de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour qu'un non vacciné tombe malade ?
(On notera V l'événement "être vacciné" et M l'événement "être malade".)

Exercice 4

Pour se rendre à l'école, un étudiant a le choix entre 4 itinéraires A, B, C et D. La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est $1/3$ (resp. $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant l'itinéraire D, l'étudiant n'arrive jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'étudiant choisisse le chemin D ?
2. L'étudiant arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 5

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux régles suivantes :
— si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^\star$), il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n,
— si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.
On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ une relation entre p_n et p_{n-1}.
2. Exprimer p_n en fonction de p_0.
3. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 6

Un géne présent dans une population est formé de 2 allèles A et a. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : **AA**, **Aa**, **aa**. Un enfant lors de la conception hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Ainsi si le père est du type **AA** et la mère de type **Aa**, les enfants peuvent être du type **AA** ou **Aa**. On considère une population (génération 0) et on note p_0, q_0 et r_0 les proportions respectives de chacun des phénotypes **AA** , **Aa** et **aa**. On admet que les couples se forment au hasard indépendamment des génotypes considérés.

1. Donner, en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait un génotype **AA**.
2. Donner de même r_1, puis q_1.
3. Démontrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment uniquement en fonction de $\alpha = p_0 - r_0$. Que peut-on dire de $p_1 - r_1$.
4. Donner les probabilités p_2, q_2 et r_2 qu'un enfant de la génération 2 ait pour génotype respectivement **AA**, **Aa** et **aa**. Que peut-on conclure ?

Exercice 7

Une particule se déplace sur les 3 sommets d'un triangle (ABC) de la façon suivante, à l'issue de chaque seconde : lorsqu'elle est en A, elle y reste avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, elle va en B avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, et en C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

Lorsqu'elle est en B, elle va en A avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, et va en C avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'elle est en C, elle va toujours en B.

On suppose qu'elle est en A à l'instant initial. Quelle est la probabilité qu'elle soit en B au bout de 60 secondes ? On note A_n l'événement : " la particule est en A à l'instant n ", $a_n = P(A_n)$ (mêmes notations pour B et C), et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \{1, \ldots, 59\}, X_{n+1} = AX_n$.
2. A est appelée matrice stochastique. Quelle remarque peut-on faire sur ses coefficients ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de A, et en déduire son spectre.
4. Diagonaliser A et déterminer X_{60}.